Homogene Koordinaten

Mit homogenen Koordinaten kann man spezielle R[illegible]nungen in der Geometrie durchführen.

Date[illegible] 62080

Stand[illegible]. Juli 2021

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK UND STUDIUM

www.mathe-cd.de

Inhalt

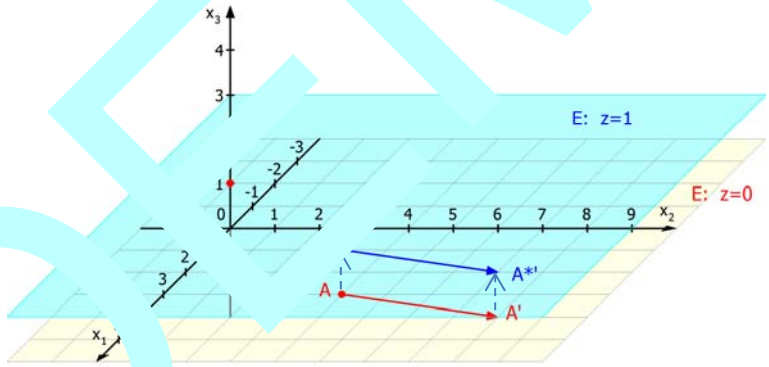
1 Homogene Punktkoordinaten im $\mathbb{R}^2$

Irgendwann hat ein Mathematiker herausgefunden, dass es in gewissen Aufgaben einen Vorteil bringt, wenn man die kartesischen Koordinaten von Punkten zu so genannten homogenen Koordinaten erweitert. Dazu fügt man im $\mathbb{R}^2$ als 3. Koordinate einfach die 1 dazu:

$$\text{Aus } A(3\,|\,5) \text{ wird } A^*[3\,|\,5\,|\,1]$$
$$\text{Aus } B(-2\,|\,0) \text{ wird } B^*[-2\,|\,0\,|\,1]$$
$$\text{Usw.}$$

Die hier gezeigte Schreibweise ist nicht überall gebräuchlich. Ich verwe[illegible] Klammern nur zur Unterscheidung gegenüber den kartesischen Koordinaten, eben[illegible] das Sternchen [illegible] Namen. Man soll eben sofort sehen, dass an dieser Stelle mit homogenen [illegible]ordinaten gearbeitet [illegible]d.

Es gibt eine interessante anschauliche Deutung dieser h[illegible]ogenen [illegible]rdinaten:
Wenn man die x-y-Ebene also Teil des Raumes betrach[illegible] hat ja [illegible] Punkt dre[illegible]ordinaten.
Da $A(3\,|\,5)$ in der x-y-Ebene liegt, ist räumlich gesehen s[illegible]e [illegible]ordinate [illegible] $(3\,|\,5\,|\,0)$.
Der Punkt mit den homogenen Koordinaten von A, also $A(3\,|\,5\,|\,1)$ [illegible] dann in der Ebene z = 1, die parallel zur x-y-Ebene ist, um 1 in z-R[illegible]rschoben.
Verwendet man also homogene Koordinaten, [illegible]n a[illegible] man [illegible]gentlich in der Raumebene z = 1.



Die Abbildung [illegible]t, wie in d[illegible]x-y-Ebene der Punkt $A(3\,|\,4)$ durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ verschoben wird. Räumlich gese[illegible]n wird $A(3\,|\,4\,|\,0)$ durch $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ nach $A'(4\,|\,8\,|\,0)$ verschoben.

In der blau gefärbten Ebene z = 1 liegen diese Punkt um 1 „höher“:

Dort wird $A^*[3\,|\,4\,|\,1]$ durch $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ nach $A'^*[4\,|\,8\,|\,1]$ verschoben.

2 Verschiebung mit homogenen Koordinaten

Eine Verschiebung kann man vektoriell so berechnen: $\vec{x}' = \vec{x} + \vec{v}$

Oder ausführlicher: $\vec{x}' = \vec{x} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ V1

Oder so: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \vec{v}$

Verlagert man diese Verschiebung in den Raum und zwar in die Ebene $z = 1$, dann muss man allen Punkten die z-Koordinate 1 geben. **$P(x \mid y)$ wird dann zu $P^*(x \mid y \mid \boxed{1})$.**

Information: Dann kann man die Verschiebung **ohne die Addition von** [illegible]

nämlich durch: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & v_1 \\ 0 & 1 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

Die Verwendung einer 3,3-Matrix hat den Vorteil, dass man keine V[illegible]oraddition benötigt, [illegible]ndern dass man nur eine Matrizenmultiplikation benötigt. Dies [illegible]t sich f[illegible]anche Berechn[illegible]gen als Vereinfachung.

Beispiel 1: Eine Verschiebung durch de[illegible] $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ ges[illegible]eht du[illegible] $\vec{x}' = \vec{x} + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

und bildet den Punkt [illegible]2 | 1) au[illegible] (8 | 5) [illegible] $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Verwendet m[illegible]azu die Dr[illegible]r-Matrix [illegible] die Abbildungsgleichung V2,

dann ergän[illegible]an $P(2 \mid 1)$ [illegible] $P^*[2 \mid 1 \mid \boxed{1}]$ und erhält:

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ [illegible] & [illegible] & 4 \\ 0 & [illegible] & [illegible] \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [illegible] \\ [illegible] \\ \boxed{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + [illegible] \\ 0 \cdot 2 + 1 \cdot [illegible] \cdot 1 \\ [illegible] 2 + [illegible] + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ \boxed{1} \end{pmatrix} \Rightarrow P^*(8 \mid 5 \mid 1) \mathrel{\hat{=}} P'(8 \mid 5)$$

d. h. $P(2$ [illegible] wird verschoben nach $P'(8 \mid 5)$.

Beispiel 2: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & [illegible] \\ 0 & [illegible] & [illegible] \\ [illegible] & [illegible] & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ **ist ergibt eine Verschiebung um** $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$**.**

$B(3 \mid -2)$ hat durch die Abbildung: $\vec{x}' = \vec{x} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ den Bildpunkt $B'(2 \mid 1)$.

Verwendet man die Dreiermatrix dazu, erhält man:

$$\vec{b}^{*\prime} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ \boxed{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + 0 - 1 \\ 0 - 2 + 3 \\ 0 + 0 + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \boxed{1} \end{pmatrix} \Rightarrow B^{*\prime}[2 \mid 1 \mid 1] \mathrel{\hat{=}} B'(2 \mid 1)$$

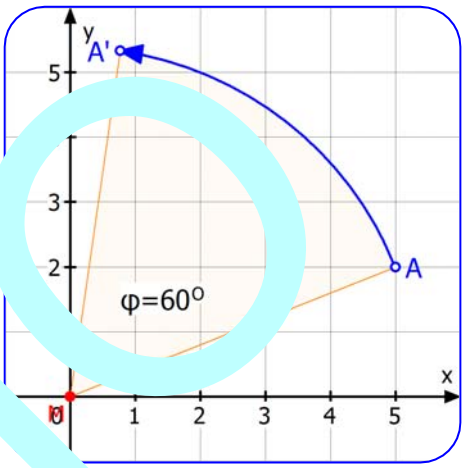
3 Drehung um O mit homogenen Koordinaten

Verwendet man homogene Koordinaten, dann wird die Drehmatrix

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \quad \text{zu} \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}.$$

1. Beispiel: Drehung des Punktes $A(5\,|\,2)$ um den Ursprung um 60°:

1. Möglichkeit mit kartesischen Koordinaten:



$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot 5 - \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot 2 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot 5 + \frac{1}{2}\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} - \sqrt{3} \\ \frac{5}{2}\sqrt{3} + 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}77 \\ 5{,}33 \end{pmatrix}$$

Der Bildpunkt ist also $A'\left(\frac{5}{2} - \sqrt{3}\,\middle|\,\frac{5}{2}\sqrt{3} + 1\right) \approx (0{,}77\,|\,5{,}33)$

2. Möglichkeit mit homogenen Koordinaten:

Aus $A(5\,|\,2)$ wird $A^*[5\,|\,2\,|\,1]$.

Abbildungsgleichung: $\vec{a}^{*\prime} = \begin{pmatrix} \cos 60^{\circ} & -\sin 60^{\circ} & 0 \\ \sin 60^{\circ} & \cos 60^{\circ} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\vec{a}^{*\prime} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot 5 - \frac{1}{2} \quad 2 + \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot 5 + \frac{1}{2} \quad 0\cdot 1 \\ 0\cdot 5 + 0\cdot 2 + \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} - \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^*\left[\frac{5}{2} - \sqrt{3}\,\middle|\,\frac{5}{2}\sqrt{3} + 1\,\middle|\,1\right]$$

Der Bildpunkt ist a[illegible] $A'\left(\frac{5}{2} - \sqrt{3}\,|\,[illegible] + 1\right) \approx (0{,}7[illegible]33)$

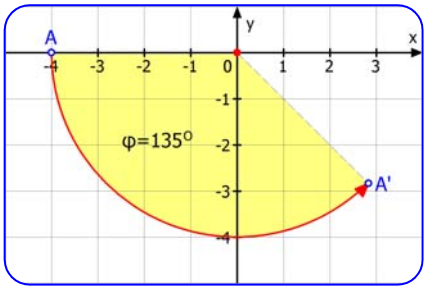
2. Beispiel: Drehung des P[illegible] $A(-4\,|\,0)$ u[illegible]n Ursprung um 135°:

1. Möglichk[illegible]schen [illegible]dinat[illegible]

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} \cos 135^{\circ} & -\sin 135^{\circ} \\ \sin 135^{\circ} & \cos 135^{\circ} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [illegible] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos 45^{\circ} & -\sin 45^{\circ} \\ \sin 45^{\circ} & -\cos 45^{\circ} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}' = \frac{[illegible]}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ [illegible] \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

Der Bildpunk[illegible]o $A'\left(2\sqrt{2}\,|\,-2\sqrt{2}\right) \approx (2{,}83\,|\,-2{,}83)$



2. Möglichkeit mit homogenen Koordinaten:

Aus $A(-4\,|\,0)$ wird $A^*[-4\,|\,0\,|\,1]$.

$$\vec{a}^{*\prime} = \begin{pmatrix} \cos 135^{\circ} & -\sin 135^{\circ} & 0 \\ \sin 135^{\circ} & \cos 135^{\circ} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Bildpunkt ist also $A'\left(\frac{5}{2} - \sqrt{3}\,\middle|\,\frac{5}{2}\sqrt{3} + 1\right) \approx (0{,}77\,|\,5{,}33)$